I- Continuité et limite en un réel :
On rappelle que :
* Toute fonction polynôme est continue en tout réel
* Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son domaine de définition
* Les fonctions : x $\longmapsto$ sin x et x $\longmapsto$ cos x sont continues en tout réel

Théorème :
Soit f et g deux fonction définies sur un intervalle ouvert I contenant a.
* Si f et g sont continues en a alors les fonctions :
α f ($\alpha \in \mathbb{R}$) ; $|f|$; f^n n $\in \mathbb{N}^*$, f + g et f $\times$ g sont continues en a.
* Si f et g sont continues en a et g (a) $\neq$ 0 alors les fonctions :
$\frac{1}{g}$; $\frac{1}{g^n}$ (n $\in \mathbb{N}^*$) et $\frac{f}{g}$ sont continue en a.
* Si f est positive sur I et f est continue en a alors $\sqrt{f}$ est continue en a .

Théorème :
Si f est définie sur un intervalle ouvert pointé I \ $\{a\}$ et f admet une limite finie l lorsque x tend vers a alors la fonction f définie sur I par : g (x) = $\begin{cases} f(x) & si\ x \neq a \\ l & si\ x = a \end{cases}$ est continue en a
La fonction g s'appelle le prolongement par continuité de f en a
* f est continue en a si et seulement si
$\lim\limits_{x \to a^+}$ f (x) = $\lim\limits_{x \to a^-}$ f (x) = f (a)

II- Continuité sur un intervalle :
Définition :
On dit q 'une fonction f est continue sur un intervalle ouvert I si elle est continue en tout réel de I.
* f continue sur $[a, b] \Leftrightarrow \begin{cases} * f\ continue\ sur\ ]a, b[\\ * f\ continue\ \text{à}\ droite\ en\ a \\ * f\ continue\ \text{à}\ gauche\ en\ b \end{cases}$
* D'une façon analogue on définit la continuité de f sur $[a, b[$; $]a, b]$; $[a, +\infty[$ et $]-\infty, b]$.

III- Opération sur limites
***** Les résultats des tableaux suivants concernant les opérations sur les limites en un réel ou à l'infini
***** l et l' sont deux réels :

1- Somme :

lim f	lim g	lim f + g
l	l'	l + l'
l	∞	∞
+∞	+∞	+∞
-∞	-∞	-∞

2-Produit

lim f	lim g	lim f × g
l	l'	l × l'
∞	l ≠ 0	∞ (en appliquant les règles de signes)
∞	∞	∞ (règles de signes)

3- Quotient

lim f	lim g	$\lim \frac{f}{g}$
l ∞ L l ≠ 0	l' ≠ 0 l' ≠ 0 ∞ 0	$\frac{l}{l'}$ ∞ (règles de signes) 0 ∞ (règles de signes)

Cas particuliers : (x_0 fini ou infini)

* $\lim\limits_{x \to x_0}$ (f + g) lorsque $\lim\limits_{x \to x_0}$ f = + ∞ et $\lim\limits_{x \to x_0}$ g = - ∞
* $\lim\limits_{x \to x_0}$ f × g lorsque $\lim\limits_{x \to x_0}$ f = 0 et $\lim\limits_{x \to x_0}$ g = ∞
* $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f}{g}$ lorsque $\lim\limits_{x \to x_0}$ f = $\lim\limits_{x \to x_0}$ g = 0 ou ∞

Pour ces cas particuliers une transformation d'écriture des fonctions f et g nous ramène aux tableaux précédents.

4- Valeur absolue et racine carrée

lim f	$\lim \lvert f \rvert$	$\lim \sqrt{\lvert f \rvert}$
L	$\lvert L \rvert$	$\sqrt{\lvert L \rvert}$
∞	+∞	+∞

Théorème :

* La limite d'une fonction polynôme à l'infini est la limite de son terme du plan haut degré
* La limite d'une fonction rationnelle à l'infini est la limite de quotient des terme du plus haut degré

IV- Branche infinies :

1) Asymptotes : (C : courbe de f)

* $Si \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \infty \\ ou \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = \infty \end{array}\right\}$ alors la droite D : x = a est asymptote verticale à C
* Si $\lim\limits_{x \to \infty}$ f (x) = b (b ∈ ℝ) alors la droite D : y = a est asymptote horizontale à C
* $\left.\begin{array}{l} Si \lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \\ et\ a \neq 0 \end{array}\right\}$ alors la droite D : y = ax + b est asymptote oblique à C

2) Branche paraboliques :

* Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors C admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de ∞
* Si $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors C admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de ∞

$$\left\{\begin{array}{l} Si \lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a \\ a \in \mathbb{R}^* \ alors \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} Si \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax) = b\ (b \in \mathbb{R}) alors\ la\ droite \\ D : y = ax + b\ est\ une\ asymptote\ \text{à}\ C\ au\ V(\infty) \\ Si \lim\limits_{x \to \infty} (f(x) - ax) = \infty \ \ alors\ la\ droite \\ D : y = ax\ est\ une\ direction\ asymptotique\ \text{à}\ C\ au \\ voisinage\ de\ \infty \ \ ou\ C\ admet\ une\ branche\ \text{infinie} \\ parabolique\ de\ direction\ \ celle\ de\ D : y = a\,x \end{array}\right.$$

V- Continuité et limite d'une fonction composée :

Définition :

Soit f une fonction définie sur un ensemble I et g une fonction définie sur un ensemble J tel que g (J) est inclus dans I la fonction notée f og définie sur J par : $f \circ g(x) = f\left[g(x)\right]$

S'appelle la fonction composée de f et g.

Continuité :

Soit f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant a et g définie sur un intervalle ouvert J contenant f (a)

Si f est continue en a et g continue en f (a) alors g o f continue en a.

Conséquence :

Si f est continue sur un intervalle ouvert I et g continue sur un intervalle ouvert J tel que g (J) est inclus dans I alors f o g continue sur J.

Limite :

Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en a de I et g une fonction définie sur J sauf peut être en l .

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to l} g(x) = l'$ alors $\lim\limits_{x \to a} g \circ f(x) = l'$

VI-Limites et ordre :

Soit f , g et h trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en a de I.

Si pour tout $x \neq a$ on a :

* $f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} f = l$ et $\lim\limits_{x \to a} g = l'$ alors $l \leqslant l'$

* $h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} h = \lim\limits_{x \to a} g = l$ alors $\lim\limits_{x \to a} f = l$.

* $f(x) \geqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f = +\infty$

* $f(x) \leqslant g(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} g = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f = -\infty$

$\longrightarrow$ Les résultats sont valables pour des limites à l'infini, à droite ou à gauche en a.

VII- Image d'un intervalle par une fonction continue :

En 3ème année on a vu que :

1) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

2) Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a et b deux réels de I tel que a < b.

* Pour tout réel k compris entre f (a) et f (b), l'équation f (x) = k possède au moins une solution dans l'intervalle $\left[a,b\right]$

* Si f (a) . f (b) <0 alors l'équation f (x) = 0 admet au moins une solution dans $\left[a,b\right]$

Remarque :

Une fonction est strictement monotone sur un intervalle I si elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Théorème :

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I et soit a et b deux réels de I tel que a < b alors pour tout k compris entre f (a) et f (b) l'équation f (x) = k admet une solution unique dans $\left[a,b\right]$

Théorème :

* L'image d'un intervalle fermé borné $\left[a, b\right]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné$\left[m,M\right]$.

m : est le minimum de f sur $\left[a, b\right]$

M : est le maximum de f sur $\left[a, b\right]$

Théorème :

$\longrightarrow$ Soit f une fonction définie sur un intervalle $\left[a, b\right[$ (b fini ou infini)

- Si f est croissante et majorée sur $\left[a, b\right[$ alors f possède une limite en b
- Si f est croissante non majorée sur $\left[a, b\right[$ alors f tend vers $+\infty$ en b

$\longrightarrow$ Soit f une fonction définie sur un intervalle $\left[a, b\right[$ (b fini ou infini)

- Si f est décroissante et minorée sur $\left[a,b\right[$ alors f possède une limite en b
- Si f est décroissante non minorée sur $\left[a,b\right[$ alors f tend vers $-\infty$ en b

Image d'un intervalle par une fonction monotone :

Intervalle I	Si f est croissante sur I	Si f décroissante sur I
$I = [a, b]$	$f(I) = [f(a), f(b)]$	$f(I) = [f(b), f(a)]$
$I = \left[a, b\right[$ $a, b \in \mathbb{R}$	$f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), f(a)\right]$
$I = \left[a, +\infty\right[$ $a \in \mathbb{R}$	$f(I) = \left[f(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x \to +\infty} f(x), f(a)\right]$
$I = \left]a,b\right[$ $a, b \in \mathbb{R}$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x \to a^+} f(x), \lim\limits_{x \to b^-} f(x)\right[$	$f(I) = \left]\lim\limits_{x \to b^-} f(x), \lim\limits_{x \to a^+} f(x)\right[$

